$\pi l \alpha y \sqrt{\text{mat}\chi}$

# Jedno jednostavno rješenje

*Marina Slišković*

Ovdje je prikazano jednostavno rješenje 2. zadatka s dodatnog natjecanja za izbor olimpijske ekipe na ovogodišnjem državnom natjecanju.

2. Neka su $a$, $b$, $c$ pozitivni realni brojevi. Vrijedi $(a+b)(b+c)(a+c) = 1$. Dokaži:

$$ab + bc + ca \leq \frac{3}{4}.$$

*Rješenje.* Po uvjetu

$$(ab + bc + ca)(a + b + c) = (a + b)(b + c)(c + a) + abc = 1 + abc$$

vrijede sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned} a+b &\geq 2\sqrt{ab} \\ b+c &\geq 2\sqrt{bc} \\ c+a &\geq 2\sqrt{ca}. \end{aligned}$$

Pomnožimo zadnje tri nejednakosti. Dobivamo

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2}.$$

Iz uvjeta zadatka je

$$1 \geq 8abc \quad \Leftrightarrow \quad abc \leq \frac{1}{8}$$

$$(ab + bc + ca)(a + b + c) = 1 + abc \leq \frac{9}{8}. \tag{1}$$

Koristeći se A-G nejednakosti (i ponovno primjenjenom uvjeta), dobivamo:

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3} \geq \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} = 1$$

$$a + b + c \geq \frac{3}{2}.$$

Sada iz toga i iz (1) slijedi

$$ab + bc + ca \leq \frac{3}{4}.$$

✓

*****

**Poziv rješavačima zadataka**

Pozivamo sve rješavače zadataka koji naiđu na neko posebno rješenje (neobično kratko, jednostavno, ostvareno na neočekivan način ili jednostavno različito od službenog) ili više rješenja istog zadatka da ih pošalju. Mi ćemo ih rado objaviti.

*Uredništvo*